

文章编号: 1000-7598-(2014) 06-1569-04

关于堆石料三维流变速率的一点笔记

黄耀英¹, 沈振中², 郑 宏³, 李春光³

(1. 三峡大学 水利与环境学院, 湖北 宜昌, 443002; 2. 河海大学 水利水电学院, 南京 210098;
3. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 原型监测表明面板堆石坝一般存在比较显著的流变现象。针对不同文献给出的堆石料三维剪切流变速率计算式存在差异, 笔者以 3 参数指数流变模型为例对堆石料三维流变速率进行了研究。假设体积流变和剪切流变变化规律不同, 首先推导了三维体积流变速率计算公式, 然后依据 Prandtl-Reuss 流动法则可以由 Mises 屈服函数作为塑性势函数推导获得。为此, 采用关联流动法则, 同时假设塑性势函数为 Mises 屈服函数, 导出了堆石料三维剪切流变速率计算式。通过将三维流变速率计算式退化为单轴流变速率计算式进行合理性分析, 分析表明, 本文导出的三维流变速率计算式理论上是严谨的, 由此指出相关文献给出的流变速率计算式理论上不严谨。

关 键 词: 堆石料; 三维状态; 体积流变速率; 剪切流变速率

中图分类号: TV 641

文献标识码: A

Note on three-dimensional rheological rate of rockfill material

HUANG Yao-ying¹, SHEN Zhen-zhong², ZHENG Hong³, LI Chun-guang³

(1. College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China; 2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098 China; 3. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Rheological phenomenon of the concrete faced rockfill dam can be critical according to prototype monitoring. In view of the three-dimensional shear rheological rate formulas of rockfill material are different in different documents. Three-dimensional rheological rate of rockfill material is studied with the rheological model of 3 parameters as an example. Volume rheology and shear rheology are assumed different. First of all, the three-dimensional volume rheological rate formula is deduced; and then, based on Prandtl-Reuss flow rule, it can be derived by Mises yield function as a plastic potential function. The computational formula of three-dimensional shear rheological rate of rockfill material is derived taking associated flow rule and assuming that the plastic potential function is Mises yield function. The theory of the computational formula of three-dimensional rheological rate is rigorous, since the computational formula of three-dimensional rheological rate can degrade into the computational formula of uniaxial state. Thus it is pointed out that the theory of the computational formula of three-dimensional rheological rate in related papers is not rigorous.

Key words: rockfill material; three-dimensional state; volume rheological rate; shear rheological rate

1 引 言

目前一般采用流变模型来描述堆石料的流变性。由于堆石坝实测资料表明, 堆石坝的变形大都在建成后若干年才逐渐沉降稳定, 因此, 一般选用随时间衰减的流变模型来反映堆石料的流变特性。依据堆石料的流变试验, 沈珠江等^[1-2]提出了 3 参

数指数流变模型; 程展林等^[3]提出了 9 参数幂函数流变模型。当采用 Prandtl-Reuss 流动法则, 获得应力张量各分量的三维流变速率时, 不同文献^[1-2, 4-5]给出的剪切流变速率表达式存在差异。为此, 本文以 3 参数指数流变模型为例, 对堆石料应力张量各分量的三维流变速率进行了研究, 并通过将三维流变速率计算式退化为单轴流变速率计算式来判断其

收稿日期: 2013-11-28

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(No. 2011CB013505); 国家自然科学基金项目(No. 51209124)。

第一作者简介: 黄耀英, 男, 1977 年生, 博士, 副教授, 主要从事大坝安全监控及岩土流变问题研究。E-mail: huangyaoying@sohu.com

合理性。

2 堆石料 3 参数流变模型

沈珠江^[1]对西北口垫层料进行了流变试验,并用具有衰减特性的指数曲线进行拟合

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_f(1 - e^{-ct}) \quad (1)$$

相应的应变速率为

$$\dot{\varepsilon} = c\varepsilon_f e^{-ct} \quad (2)$$

式中: ε_f 相当于 $t \rightarrow \infty$ 时的最终流变量; c 相当于 $t=0$ 时第 1 天流变量占 ε_f 的比值。

最终流变量 ε_f 与应力状态有关。对于堆石料而言,其体积流变和剪切流变有不同的规律。沈珠江根据试验研究结果,对体积流变 ε_{vf} 与剪切流变 ε_{sf} 分别建议了如下关系式^[1]:

$$\varepsilon_{vf} = b \frac{\sigma_3}{p_a} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{sf} = d \frac{S}{1-S} \quad (4)$$

式中: b 和 d 为参数, b 相当于 $\sigma_3 = p_a$ (大气压) 时最终体积流变量, d 为应力水平 $S = 0.5$ 时的最终剪切流变量; 破坏时 $S = 1.0$, $\varepsilon_{sf} \rightarrow \infty$ 。

假定堆石料的体积流变与剪切流变都可用式 (2) 描述, 由式 (2) 得体积变形速率 $\dot{\varepsilon}_v$ 和剪切变形速率 $\dot{\varepsilon}_s$ 为

$$\dot{\varepsilon}_v = c\varepsilon_{vf} e^{-ct} \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = c\varepsilon_{sf} e^{-ct} \quad (6)$$

以上即为沈珠江建议的 b 、 c 和 d 3 参数流变模型。

3 堆石料三维流变速率

3.1 Prandtl-Reuss 流动法则

1924 年 Prandtl 将 Levy-Mises 关系式推广应用至塑性平面应变问题^[6], 对于塑性部分, 其假设塑性应变增量张量和应力偏张量相似且同轴向。1930 年 Reuss 把 Prandtl 应用在平面应变上的这个假设推广到一般三维问题^[6], 由此建立的 Prandtl-Reuss 流动法则关系式可表示为^[6]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad (7)$$

式中: $d\lambda$ 为比例系数, 其是一个非线性关系式; s_{ij} 为应力偏张量; $d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p$ 为塑性应变增量张量。

当考虑塑性的不可压缩性时, 即 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{ii}^p = 0$, 则

$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p$ 。其中, $d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p$ 为塑性应变增量偏张量。

类比弹性势函数, 1928 年 Von Mises^[6]提出的塑性势理论为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

式中: Q 为塑性势函数。

对于关联流动法则, 假设塑性势函数为 Mises 屈服函数, 那么 $Q = F = \sqrt{\frac{3s_{ij}s_{ij}}{2}}$, 采用张量表示法 (tensorial notation)^[7]有

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3d\lambda}{2q} s_{ij} \quad (9)$$

式中: 广义剪应力 $q = \sqrt{3J_2}$, J_2 为应力偏量的第二不变量。

将系数 $\frac{3}{2q}$ 归入 $d\lambda$, 于是得到

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad (10)$$

由此可见, Prandtl-Reuss 流动法则可由 Mises 屈服函数作为塑性势函数求得^[6]。

3.2 基于 Prandtl-Reuss 流动法则推导堆石料三维流变速率

由式 (5) 和式 (6), 采用 Prandtl-Reuss 流动法则, 可以获得堆石料三维流变速率计算式。目前, 一般将三维体积流变速率和三维剪切流变速率分开进行分析。

对于三维体积流变速率, 由于 $\dot{\varepsilon}_v$ 为体积流变速率, 容易得到三维体积流变速率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ 计算式为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_v}{3} \mathbf{I}' \quad (11)$$

式中: $\mathbf{I}' = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

对于三维剪切流变速率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^s$, 类比塑性势理论, 有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = N\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (12)$$

式中: λ 为比例系数; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为流变应变率偏量; N 为工程剪应变和剪应变张量的转换矩阵,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}。$$

令比例系数 $\lambda = \dot{\varepsilon}_s$, 采用关联流动法则, 由于

这里仅考虑剪切流变速率, 为此假设塑性势 Q 为 Mises 屈服函数, 那么 $Q = F = \sqrt{3J_2}$, 可以得到

$$\dot{\epsilon}^s = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \dot{\epsilon}_s \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \dot{\epsilon}_s \frac{3}{2q} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

令 $s' = [s_x \ s_y \ s_z \ 2\tau_{xy} \ 2\tau_{yz} \ 2\tau_{zx}]^T$, 由式 (13) 有

$$\dot{\epsilon}^s = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \dot{\epsilon}_s \frac{3}{2q} s' \quad (14)$$

由式 (11)、(13)、(14) 得到各应变分量的流变速率为

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{3\dot{\epsilon}_s}{2q} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{或} \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} I' + \frac{3\dot{\epsilon}_s}{2q} s' \quad (16)$$

采用相对时间进行流变分析^[1], 由式 (16) 可以方便地得到应变分量的流变增量有限元计算式为

$$\Delta \epsilon = \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} I' \Delta t + \frac{3\dot{\epsilon}_s}{2q} s' \Delta t \quad (17)$$

式中: $\Delta \epsilon$ 为应变增量分量; Δt 为时间增量。

分析可知, 本文导出的式 (15) 和式 (16) 的剪切流变速率与文献[1-2, 4-5]给出的剪切流变速率形式上相似, 但不完全一样。

文献[1-2]给出的剪切流变速率为 $\dot{\epsilon}^s = \frac{\dot{\epsilon}_s}{q} s$; 文

献[4]给出的剪切流变速率为 $\dot{\epsilon}^s = \dot{\epsilon}_s \frac{1}{2q} s'$; 文献[5]

给出的剪切流变速率为 $\dot{\epsilon}^s = \dot{\epsilon}_s \frac{1}{2q} s$ 。其中, s 为偏应力, 其与 s' 不同。

4 堆石料三维流变速率合理性分析

现将堆石料三维流变速率计算式退化为单轴应力状态, 以考察其合理性。设单轴应力状态 $\sigma_x = \sigma$ 、 $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{ij} = 0$, 代入广义剪应力 q 和偏应力, 有

$$q = \sqrt{3J_2} = \sigma, s_x = \frac{2}{3}\sigma, s_y = s_z = -\frac{\sigma}{3} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (15), 有

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_s \\ -\dot{\epsilon}_s/2 \\ -\dot{\epsilon}_s/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

将式 (19) 代入应变率强度计算式, 有

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)} = \dot{\epsilon}_s \quad (20)$$

由式 (20) 可见, 堆石料三维流变速率计算式 (式 (15)) 可以退化获得单轴流变速率计算式, 即本文导出的三维流变速率计算式理论上是严谨的, 另外, 这也说明本文假设比例系数 $\lambda = \dot{\epsilon}_s$ 也是合理的。由于文献[1-2, 4-5]给出的三维流变速率计算式不能退化获得单轴流变速率计算式, 即文献[1-2, 4-5]给出的三维流变速率计算式理论上不严谨。

5 结 论

(1) 采用 Prandtl-Reuss 流动法则, 导出了 3 参数指数流变模型下的三维流变速率计算式, 所获得的剪切流变速率计算式与相关文献给出的计算式存在差异。

(2) 通过将三维流变速率计算式退化为单轴流变速率计算式来判断计算式的合理性, 分析表明, 本文导出的三维流变速率计算式理论上是严谨的。

(3) 值得注意的是, 本文将三维体积流变速率和三维剪切流变速率分开进行分析, 而由于颗粒间的滑移会引起堆石体的剪缩或剪胀, 即单纯的剪应力作用也会引起体应变, 该问题值得进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 沈珠江, 赵魁芝. 堆石坝流变变形的反馈分析[J]. 水利学报, 1998, 29(6): 1-6.
SHEN Zhu-jiang, ZHAO Kui-zhi. Back analysis of creep deformation of rockfill dams[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1998, 29(6): 1-6.
- [2] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.